Заняття №6

(перший семестр)

Дискретні випадкові величини. Функція розподілу

На ймовірносному просторі $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ розподілом ймовірностей називаються $P(B)$, $B \in \mathscr{F}$.

Випадкова величина – це вимірне відображення $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, тобто $\forall B \in \mathscr{B}_R \ \ \xi^{-1}(B) \in \mathscr{F}$.

Розподілом ймовірностей випадкової величини називаються $P_\xi(B) = P(\xi \in B)$, $B \in \mathscr{F}$.

Розподіл ймовірностей для дискретної випадкової величини задається за допомогою ряду розподілу

x_1	$\dots$	x_n
p_1	$\dots$	p_n

$(n \le \infty)$ і $\forall A \subset \Omega \quad P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = \sum_{i: x_i \in A} p_i$, а $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ (сумарне одиничне значення називають характеристичною властивістю ряду розподілу ймовірностей дискретної в.в.).

Основні дискретні розподіли:

1) *Рівномірний*:

x_1	$\dots$	x_n
$1/n$	$\dots$	$1/n$

2) *Бернуліївський* $Be(p)$:

1	0
p	$1-p$

3) *Біноміальний* $Bi(n,p)$ $0 \le p \le 1$, $n \in N$

$$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k};$$

0	1	$\dots$	n
p_0	p_1	$\dots$	p_n

4) *Геометричний* G(p):

$$p_k = pq^{k-1}$$

1	$\dots$	n	$\dots$
p_1	$\dots$	p_n	$\dots$

5) *<u>Пуассонівський</u>* Π_λ: $P\{\xi = m\} = \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, $m = 01,2\ldots$

6) *<u>Гіпергеометричний</u>* $GG(N, M, n)$: $P\{\xi = m\} = \dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$.

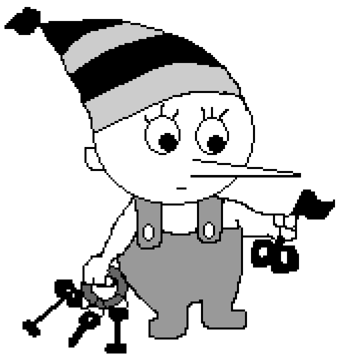
<u>Функція розподілу</u>: $F_\xi(x) = P\{\xi \le x\} = \sum\limits_{k \le x} P\{\xi = k\}$ (для дискретної випадкової величини)

(Невід'ємна, неспадна, неперервна справа. „Зліва” – коли $F(x) = P\{\xi < x\}$.)

<u>Аудиторна робота № 6</u>

<u>Задача 6.1</u> Нехай X – кількість пострілів по мішені до першого влучення. Ймовірність влучити при одному пострілі є $p \in (0,1)$. Скласти таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини X. Зобразити многокутник розподілу при $p = 0.5$. Перевірити, що сума всіх ймовірностей в побудованій таблиці дорівнює 1.

<u>Задача 6.2</u> В коробці 4 червоних та 3 зелених олівці. Із коробки навмання дістають 3 олівці. Нехай X – випадкова величина, що дорівнює кількості витягнутих червоних олівців. Знайти розподіл випадкової величини X та ймовірності таких подій: $A = \{X \ge 2\}$, $B = \{X \le 1\}$. Побудувати функцію розподілу випадкової величини X.



<u>Задача 6.3</u> Маємо 5 ключів, серед яких тільки один підходить до замка. X – кількість спроб відкрити замок без повертання перевірених ключів. Знайти розподіл випадкової величини X.

<u>Задача 6.4</u> Розподіл випадкової величини X задано таблицею:

X_i	π/4	π/2	3π/4
p_i	0,2	0,7	0,1

Знайти розподіл випадкової величини Y = sin(X).

Задача 6.5 Розподіл випадкової величини X задано таблицею:

X_i	0	4	5	8
p_i	0,15	x	0,33	0,22

Знайти $P\{X \le 4\}$ та побудувати многокутник розподілу.

Задача 6.6 $X \in \mathbb{N}$, $P\{X = n\} = 2^{-n}$. Знайти розподіл випадкової величини $Y = \sin\frac{\pi X}{2}$.

Задача 6.7 По каналу зв'язку передають 0 або 1. $P\{X = 1\} = P\{X = 0\} = 1/2$. Через погану якість зв'язку передана 1 на пункт прийому може прийти як 1 з ймовірністю *p*, а переданий 0 приходить як 0 з ймовірністю *q*. Знайти закон розподілу випадкової величини *Y* – числа, що буде прийняти на пункті прийому.

Задача 6.8 Скласти ряд розподілу випадкової величини *Z*, яка є відношенням числа появ герба (*X*) до числа появ решітки (*Y*) при 5 підкиданнях монети.

Задача 6.9 *X* – випадкова величина, що дорівнює сумі очок, що випали на двох гральних кубиках. Знайти розподіл випадкової величини *X*.

Домашнє завдання № 6

1. Розподіл випадкової величини X задано таблицею:

x_i	-1	0	1	2
p_i	0.2	0.3	x	0.2

   Знайти розподіл випадкової величини а) $Y = X^2 + 1$, б) $Y = |X|$.

2. Довести, що серед всіх дискретних випадкових величин тільки геометрично розподілена випадкова величина має властивість:

$$P\{X = m + k \mid X \ge m\} = P\{X = k + 1\} \quad (m \in \mathbb{N},\ k \ge 0)$$

3. Які з послідовностей є розподілами ймовірностей випадкових величин:
   - при $k = 1,2,3,\ldots$

   а) $\frac{1}{k(k+1)}$, **б)** $p^k q^2$ ($q = 1 - p$, $p \in (0,1)$), **в)** $e^{-\lambda}(1 - e^{-\lambda})^{k-1}$ ($\lambda > 0$)

   - при k = 0,1,2,3,…

   г) $\frac{5^k}{k!}e^{-5}$, **д)** $\int\limits_k^{k+1} e^{-\gamma x}dx$ ($\gamma > 0$), **е)** $\frac{2}{\pi}\int\limits_k^{k+1}\frac{dx}{1+x^2}$.

Додаткові задачі

1. В колоді а) 52 б) 36 карт. Навмання дістається одна карта, а гравець при цьому теж називає одну із карт. Якщо співпаде масть чи величина названої та витягнутої карти, то гравець

виграє. Яка ймовірність виграти? Скільки має бути карт в колоді (кожної величини по 4 масті), щоб ймовірність виграшу склала ½ ?

2. Підкидають 4 гральні кубика. Випадкова величина X може приймати три значення: -1, 0, та 1. Якщо хоч на одному кубику випаде 1, то $X = -1$, інакше якщо випаде хоч одна п'ятірка, то $X = 0$, інакше $X = 1$. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X і знайти її середнє значення та дисперсію.
3. Знайти ймовірність того, що m однотипних предметів, які навмання розкладено по k ящиках, опиняться в n ящиках (а $k - n$ ящиків зостануться порожніми).

   Розв'язати цю задачу в загальному випадку та побудувати ряд розподілу для випадкової величини ξ, яка є кількістю непорожніх ящиків при розкладанні $m = 4$ предметів по $k = 3$ ящикам.

   Спробуйте розв'язати цю ж задачу, якщо предмети різні.

Задачі підвищеної складності

Давайте пригадаємо відому дитячу гру "бики та корови". В неї грають як зі словами так і з цифрами, а оскільки принципової різниці між цими видами гри немає, то розглянемо саме цифровий варіант. Ведучий записує на "секретному" клаптику паперу обумовлену заздалегідь кількість цифр, які і має відгадати гравець, який називає таку саму кількість цифр, а ведучий каже, які з названих цифр справді є на папірці ("корови") і які до того ж мають ті ж місця, що і названі ("бики"). На базі цієї інформації гравець має врешті решт відгадати загадане ведучим число (відзначимо, що кожен "бик" також є "коровою"). Так, якщо загадане число 037, а гравець називає 070, то ведучий скаже, що є 2 корови (цифри 0 та 7 є в обох числах) та 1 бик (перший названий нуль є першим і в загаданому числі). Гра майже не змінюється, коли "бик" не може бути "коровою", тоді просто кількість "корів" зменшують на кількість "биків" (тоді у наведеному вище прикладі 1 "бик" і 1 "корова").

Розглянемо цю гру з точки зору теорії ймовірностей, зокрема нас будуть цікавити такі питання, як розподіл "биків" та розподіл "корів".

1. Нехай маємо 2 набори по n навмання записаних цифр. Яка ймовірність того, що в цих двох наборах є саме k "биків"?
2. Нехай маємо 2 набори по $n = 2$ навмання записаних цифр. Яка ймовірність того, що в цих двох наборах є саме k "корів"?
3. Нехай маємо 2 набори по а) $n = 3$ б) $n = 4$ навмання записаних цифр. Яка ймовірність того, що в цих двох наборах є саме k "корів"?
4. Очевидно, що ймовірність кожної із загаданих (навмання) на довільному місці цифр бути "биком" є 0.1, а от якими є відповідні ймовірності для "корів" а) при $n = 2$, б) при $n = 3$ в) $n = 4$? (Для кожної наступної загаданої цифри ця ймовірність менша за відповідну ймовірність для попередньої цифри, бо "корови" перевіряються зліва направо).

5. Досить неважко довести (і використовувати для перевірки правильності розв’язку сформульованих задач разом із характеристичною властивістю ряду розподілу ймовірностей) наступну формулу:

$$\sum_{t=0}^{n} P\{буде\ t\ биків(корів)\}\cdot t = \sum_{s=1}^{n} P\{цифра\ на\ s-му\ місці\ буде\ биком(коровою)\}$$

6. Монета підкидається до тих пір, доки двічі підряд не випаде герб. Знайти ймовірність того, що підкидання припиняться на парному кроці.