<u>Заняття №7</u>

(перший семестр)

<u>Математичне сподівання та дисперсія дискретної випадкової величини</u>

Якщо ξ – дискретна випадкова величина з рядом розподілу ймовірностей ($n \le \infty$):

ξ	x_1	x_2	...	x_n
$\boldsymbol{p}$	p_1	p_2	...	p_n

то її ***<u>математичне сподівання</u>***

$$M\xi = E\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \ ,$$

<u>дисперсія</u>

$$D\xi = \operatorname{var}(\xi) = M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k p_k\right)^2$$

(міра розсіяння значень випадкової величини навколо її середнього зваженого).

Нагадаємо, що:

а) характеристичною властивістю ряду розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини є одиничне значення суми ймовірностей з цього ряду;

б) Властивості математичного сподівання:

1. $Mc = c$;
2. $Mc\xi = cM\xi$;
3. $M(\xi \pm \eta) = M\xi \pm M\eta$;
4. якщо ξ і η – незалежні випадкові величини, то $M\xi\eta = M\eta M\xi$.

в) Властивості дисперсії:

1. $Dc = 0$;
2. $Dc\xi = c^2 D\xi$;
3. якщо ξ і η – незалежні випадкові величини, то: $D(\xi \pm \eta) = D\eta + D\xi$

Математичне сподівання, як числова характеристика випадкової величини, характеризує її середнє значення. Це видно з механічної інтерпретації математичного сподівання. Якщо припустити, що матеріальні точки з абсциси x_i мають маси p_i (i = 1,2,...,n), а їх загальна маса дорівнює одиниці $\left(\sum_{k=1}^{n} p_k = 1\right)$, то математичне сподівання задає абсцису центра мас матеріальних точок.

Розмірність математичного сподівання збігається з розмірністю випадкової величини, а розмірність дисперсії – ні. Для того, щоб розмірність характеристики розсіювання була така сама, як і розмірність випадкової величини, вводять *середньоквадратичне відхилення* або *стандартне відхилення*

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$$

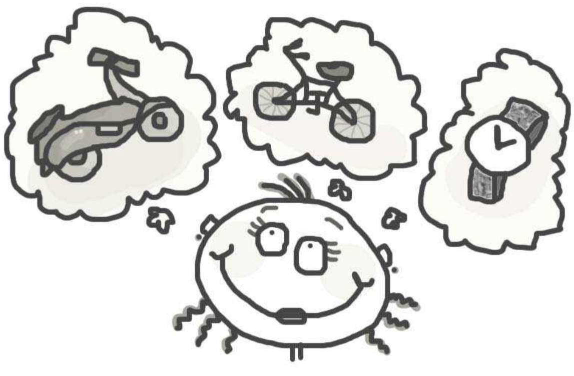
Аудиторна робота № 1

Задача 7.1 Нехай X – дискретна випадкова величина з розподілом

X_i	-1	0	1
p_i	0.2	0.3	?

Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X^4.

Задача 7.2 В лотереї розігрують мотоцикл за 250 умовних грошових одиниць (у.о.), велосипед – за 50 у.о. і годинник за 40 у.о. Знайти математичне сподівання виграшу для людини, у якої 1 білет, якщо всього 100 білетів.



Задача 7.3 Із ящика, в якому 2 білих та 4 чорних кулі, виймають 3 кулі і перекладають в інший ящик, де вже було 5 білих куль. Потім з другого ящика перекладають 4 кулі знову до першого ящика. Знайти математичне сподівання числа білих куль x_1 та x_2 в обох ящиках.

Задача 7.4 При киданні трьох гральних кубиків гравець виграє 18 гривень, якщо випадають три шістки, 1,4 гривні – якщо випаде лише дві шістки, 0,2 гривні – якщо випаде одна шістка. Якою має бути ставка за участь у грі, щоб гра була нешкідливою (рос. – безобидной)?

Задача 7.5 X_1 – число очок на одному гральному кубику, X_2 – сума очок при киданні двох гральних кубиків. Знайти математичні сподівання та дисперсії випадкових величин X_1 та X_2.

Задача 7.6 Монету підкидають до першої появи герба. Знайти середнє число підкидань.

Домашнє завдання № 7

1. По мішені, ймовірність влучити в яку є **p**, стріляють, доки не набереться **k** влучень. Знайти функцію розподілу та математичне сподівання числа пострілів.
2. Із ящика, в якому m білих та n чорних куль, дістають і повертають назад кулі до тих пір, доки не витягнуть білу кулю. Знайти математичне сподівання числа X витягнутих чорних куль.
3. Із ящика, в якому w_1 білих та b_1 чорних куль, виймають n_1 куль і перекладають в інший ящик, де вже було w_2 білих куль та b_2 чорних куль. Потім з другого ящика перекладають n_2 куль знову до першого ящика. Знайти математичне сподівання числа білих куль x_1 та x_2 в обох ящиках.

   Варіанти:

Варіант №	w_1	b_1	n_1	w_2	b_2	n_2
1	2	4	3	5	2	4
2	3	4	3	5	2	4
3	2	5	3	5	2	4
4	2	4	4	5	2	4
5	2	4	3	6	2	4
6	2	4	3	5	3	4
7	1	4	3	5	2	4
8	2	3	3	5	2	4
9	2	4	2	5	2	4
10	2	4	3	4	2	4
11	2	4	3	5	4	4
12	2	4	3	5	2	3

   Відповідь дати з точністю до 10^{-3}.

Додаткові задачі

1. Навмання обирається число ξ із чисел $\{1, 2, \dots, N\}$, а потім із множини $\{\xi, \xi+1, \dots, N\}$ навмання обирається число η. Знайти розподіл випадкової величини η (в загальному випадку та при N=5).

2. “Тріель”: троє приймають участь в “трикутній” дуелі на пістолетах. Всім добре відомо, що A влучає з ймовірністю 0.3, B – з ймовірністю 1, а C – з ймовірністю 0.5. Вони стріляють по черзі (перший – A ...), поранений чи вбитий вибуває, і все це триває до тих пір, доки один з них не залишиться. Яку стратегію має обрати гравець A, щоб найімовірніше виграти?