Заняття №12

(перший семестр)

Багатовимірні гауссівські розподіли

Компонентами випадкового вектора є випадкові величини, задані на спільному ймовірносно му просторі.

Функція розподілу : $F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = P\{\xi_i < x_i ,\quad i = \overline{1,n}\}$

Якщо $\exists f_{\bar{\xi}}(\bar{x})$ така, що $F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \dots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f_{\bar{\xi}}(y_1,\dots,y_n)\,dy_1 \dots dy_n$ (причому $f_{\bar{\xi}}(\bar{x})$ інтегрована за Ріманом в нескінчених межах по кожній з своїх координат), то $f_{\bar{\xi}}(\bar{x})$ називається щільністю випадкового вектора $\bar{\xi}$.

Вектор $\bar{\xi} = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ називається гауссівським (нормальним), якщо його щільність має вид

$$f_{\bar{\xi}}(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\Delta}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} k_{ij}^{(-1)}(x_i - M\xi_i)(x_j - M\xi_j)\right\}, \qquad \textbf{(1)}$$

де $\Delta = \det\|k_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$ – визначник кореляційної матриці $B = \|k_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$, де $k_{ij} = \operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j) = M(\xi_i - M\xi_i)\overline{(\xi_j - M\xi_j)}$, $k_{ij}^{(-1)}$ - елемент матриці B^{-1}, тобто $k_{ij}^{(-1)} = \frac{1}{\Delta}A_{ij} = \frac{1}{\Delta}A_{ji}$, (де A_{ji} - алгебраїчне доповнення до k_{ij}).

Матричний запис щільності (1) такий :

$$f_{\bar{\xi}}(x_1,\dots,x_n) = \sqrt{\frac{\det(B^{-1})}{(2\pi)^n}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(B^{-1}(\bar{x} - M\bar{\xi}),(\bar{x} - M\bar{\xi})\right)\right\}. \qquad \textbf{(2)}$$

Теорема 1: У гауссівського вектора некорольованість (лінійна незалежність) його компонент еквівалентна їхній незалежності.

Теорема 2: $\bar{\xi}$-гауссівський вектор $\Leftrightarrow$ $(\bar{\xi},\bar{\lambda}) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\lambda_i$ – гауссівська випадкова величина $\forall\bar{\lambda} \in R^n$.

Теорема 3: ξ – гауссівський вектор $\Rightarrow$ кожен його підвектор теж гауссівський (але не навпаки!).

Щільність двовимірного гауссівського вектора $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ має вид :

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}, \qquad \textbf{(3)}$$

де ρ – коефіцієнт кореляції випадкових величини ξ_1 та ξ_2, a_i – їхні математичні сподівання, а σ_i^2 – їхні дисперсії.

Аудиторна робота № 12

Задача 12.1 Довести, що щільність розподілу гауссівського вектора, у якого координати незалежні, є добутком щільностей його координат.

Задача 12.2 x та y – гауссівські випадкові величини, Ex = 26, Ey = –12, а їх кореляційна матриця

$$\|k_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 196 & -91 \\ -91 & 169 \end{Vmatrix}.$$

Знайти щільність вектора (x,y).

Задача 12.3 Дано щільність розподілу ймовірностей координат (ξ,η) випадкової точки на площині:

$$f_{(\xi,\eta)}(x,y) = C \cdot \exp\left\{-\left[4(x-5)^2 + 2(x-5)(y-3) + 5(y-3)^2\right]\right\}.$$

Знайти С. Чи є вектор (ξ,η) гауссівським? Знайти кореляційну матрицю В.

Задача 12.4 Визначити в точці $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, щільність ймовірностей системи двох нормальних випадкових величин (x_1, x_2) із $Mx_1 = M x_2 = 0$ та кореляційною матрицею

$$\|k_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 12.5 Випадковий вектор (x, y) має нормальний розподіл з Ex = Ey = 0, Ex^2 = Ey^2 = σ^2, Exy = 0. Знайти $P\{x<y\}$ та $P\{x>0, y>0\}$.

Задача 12.6 $\xi \sim N(0,1)$, $\eta_1 = \pm 1$ з ймовірністю ½ , $\eta_2 = \pm 1$ з ймовірністю ½ . ξ, η_1, η_2 , – незалежні. $\xi_1 = \xi \cdot \eta_1$, $\xi_2 = \xi \cdot \eta_2$. Довести, що ξ_1 та $\xi_2 \sim N(0,1)$, але вектор (ξ_1, ξ_2) не є гауссівським.

Домашнє завдання № 12

1. $\xi_i \sim N(0,i)$, $(i=\overline{1,100})$ незалежні. Побудувати кореляційну матрицю випадкового вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_{100})$, та знайти її визначник.
2. Випадкову точку в просторі задано прямокутними координатами, що утворюють систему нормальних величин зі щільністю

$$f(x,y,z) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi^{3/2}} exp\left\{ -\frac{1}{8}\left(2x^2 + 4y^2 - 2y(z+5) + (z+5)^2\right)\right\}$$

   Скласти кореляційну матрицю B, переконавшись, що $f(x,y,z)$ справді є нормальною щільністю. Визначити геометрично місце точок, в яких f(x, y, z) = 0,01.

Додаткові задачі до заняття № 12

1. Дано кореляційну матрицю системи трьох нормальних випадкових величин

$$(X, Y, Z):\ K = \|k_{ij}\| = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$ та MX = MY = MZ = 0. Знайти щільність

f(x,y,z) вектора (X, Y, Z) та max f(x,y,z)

2. Система n нормальних випадкових величин має кореляційну матрицю:

$$K = \|k_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-2 & n-2 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n \end{pmatrix}$$

а) Знайти обернену матрицю K^{-1}

б) Знайти щільність $f(x_1, x_{2,} \ldots, x_n)$, якщо $Mx_1 = Mx_2 = \ldots = Mx_n = 0.$

3. Координати (x_1, y_1) та (x_2, y_2) випадкових точок на площині підкорені закону нормального розподілу, причому математичні сподівання всіх координат дорівнюють нулю, дисперсії всіх координат однакові та рівні 10; кореляційні моменти між однойменними координатами $\mathrm{M}x_1, x_2 = \mathrm{M}y_1, y_2 = 2$, всі інші пари координат некорельовані. Знайти щільність ймовірності $f(x_1, y_1, x_2, y_2)$.

4. Координати (x, y) випадкової точки A на площині підкорені нормальному закону: $f(x, y) = \dfrac{1}{2\pi ab} \exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)\right\}$.

Визначити ймовірність того, що точка A опиниться всередині еліпса з головними півдіаметрами ka та kb, які співпадають з координатними осями Ox та Oy.