

Марковські процеси з неперервним часом

Опис процесу з неперервним часом за допомогою інфінітезимальної матриці

Випадковий процес $x(t)$, $t \in T$ називається **марковським** (МП) (або його ще називають марковським ланцюгом з неперервним часом), якщо $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ($t_k \in T$) послідовність $x(t_1), \dots, x(t_n)$ утворює марковський ланцюг (дискретний час). Тоді ймовірність переходу є

$$P(t, x, s, y) = P\{x(s) = y \mid x(t) = x\}.$$

Рівняння Колмогорова-Чепмена для МП має вид :

$$P(t, x, s, y) = \sum_z P(t, x, \tau, z) P(\tau, z, s, y) \quad [t < \tau < s]$$

МП називається **однорідним** (ОМП), якщо $P(t, x, s, y) = P(s - t, x, y)$

Рівняння Колмогорова – Чепмена для ОМП має вид

$$P(t + s, x, y) = \sum_z P(t, x, z) P(s, z, y)$$

Для ОМП позначають $p_{ij}(t) = P(t, i, j)$, де за множину станів приймають N чи $\{1, 2, \dots, n\}$. Якщо позначити $\Pi(t) = \| p_{ij}(t) \|$, то для ОМП матимемо

$$\Pi(s + t) = \Pi(t) \cdot \Pi(s)$$

Вище розглянуто задання марківського процесу (МП) з неперервним часом та дискретною множиною станів за допомогою початкового розподілу та матриці імовірностей переходів $\Pi(t)$. Тепер розглянемо ще один спосіб задання МП.

Будемо розглядати лише МП з неперервним часом та дискретною множиною станів.

МП називається **локально регулярним** (ЛРП), якщо :

1. в кожному стані процес проводить деякий час (до виходу),
2. з кожного стану процес переходить в деякий інший стан.

Теорема 1 Для ЛРП $\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(h) - \delta_{ij}}{h} = a_{ij}$ та $\forall i \sum_j a_{ij} = 0$.

$$N.B.1 \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} - \text{символ Кронекера.} \quad N.B.2 \quad a_{ij} = p'_{ij}(0)$$

N.B.3 a_{ij} називаються **інфінітезимальними характеристиками** ЛРП, а матриця $A = \| a_{ij} \|$ - **інфінітезимальною матрицею** (ІМ).

Суть інфінітезимальних характеристик :

1) $-\frac{1}{a_{ii}}$ є середнім часом перебування ЛРП в стані i , тобто момент виходу t_{θ} зі стану i має показниковий розподіл з параметром $(-a_{ii})$:

$$P\{t_{\theta} > t\} = e^{a_{ii}t}$$

2) Якщо $a_{ii} = 0$, то стан i називається **поглинаючим**.

3) $\pi_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ є ймовірністю переходу зі стану i саме (!) в стан j .

Теорема 2 Якщо ОМП (однорідний марківський процес) з матрицею ймовірностей переходів $\Pi(t) = \|p_{ij}(t)\|$ є ЛРП (локально регулярним), то має місце перша система рівнянь Колмогорова :

$$\boxed{\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = \sum_k a_{ik} p_{kj}(t)} \quad (\text{ПСРК})$$

$$i, j = 1, \dots, n$$

або в матричному вигляді:

$$\boxed{\Pi'(t) = A\Pi(t)} \quad (\text{ПСРК})$$

Теорема 3 Якщо $\sup_i |a_{ii}| < \infty$, то ПСРК має єдиний обмежений розв'язок при фіксованих початкових умовах, якими є $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$, що природно узгоджується зі змістом $p_{ij}(t)$.

N.В.4 Також в умовах теореми 3 має місце друга система рівнянь Колмогорова:

$$\boxed{\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t) a_{kj}} \quad (\text{ДСРК})$$

$$i, j = 1, \dots, n$$

або в матричному вигляді:

$$\boxed{\Pi'(t) = \Pi(t)A} \quad (\text{ДСРК})$$

ДСРК зручна тим, що дає змогу знаходити безумовні розподіли МП, зокрема, якщо ДСРК домножити (ліву і праву частини) на $p_i \equiv P\{x(0) = i\}$ та просумувати обидві частини по i , то отримаємо :

$$\boxed{\frac{d}{dt} p_j(t) = \sum_k p_k(t) a_{kj}} \quad (*)$$

$$j = 1, \dots, n$$

і ця система розв'язується відносно $p_j(t) = P\{x(t) = j\}$ при деяких початкових умовах $p_j(0) = p_j$.

Якщо $p_j(t)$ не залежать від t (тобто $p_j(t) = p_j$ і, відповідно, $p'_j(t)=0$), то тоді p_j називаються

стаціонарними ймовірностями (стаціонарним розподілом), причому з (*) впливає така система для знаходження стаціонарних розподілів :

$$\boxed{\sum_k p_k a_{kj} = 0} \quad (**)$$

$$j = 1, \dots, n$$

Аналогічно шукаються і граничні ймовірності (разом з умовою $\sum_k p_k = 1$).

Задача 3.1 Виразити сумісні розподіли марковського процесу через ймовірності переходів $P(t, x, s, y)$ та початковий розподіл $p_k = P\{x(0)=k\}$.

Задача 3.2 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ – незалежні випадкові величини. Утворюємо випадковий процес з неперервним часом $S_t (t \geq 0)$ так:

$$S_t = \xi_k (t - k) + \xi_{k+1} (k + 1 - t) \quad \text{для} \quad k \leq t < k + 1.$$

Чи буде $S_t (t \geq 0)$ марковським процесом?

Задача 3.3 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ – незалежні випадкові величини. Утворюємо випадковий процес з неперервним часом $S_t (t \geq 0)$ так:

$$S_t = \xi_k (t - k) + \xi_k I_{\{t=k\}} \quad \text{для} \quad k \leq t < k + 1.$$

Чи буде $S_t (t \geq 0)$ марковським процесом?

Задача 3.4 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ – незалежні випадкові величини. Утворюємо випадковий процес з неперервним часом S_t ($t \geq 0$) так:

$$S_t = a\xi_{k+1} + b\xi_k \quad \text{для} \quad k \leq t < k+1, a>0, b>0.$$

Чи буде S_t ($t \geq 0$) марковським процесом?

Задача 3.5 ξ_t – пуассонівський випадковий процес з параметром λ , тобто $\xi_0=0$, а $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ випадкові величини $(\xi_{t_1} - \xi_{t_0}), (\xi_{t_2} - \xi_{t_1}), \dots, (\xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}})$ незалежні і кожен приріст $(\xi_t - \xi_s)$ (для $0 \leq s \leq t$) має розподіл Пуассона з параметром $\lambda(t-s)$, тобто

$$P\{\xi_t - \xi_s = i\} = \frac{(\lambda(t-s))^i}{i!} \cdot e^{-\lambda(t-s)}$$

Довести, що пуассонівський процес є марковським. Знайти перехідні ймовірності.

Задача 3.6 ξ_t – пуассонівський випадковий процес з параметром λ . Будуємо новий випадковий процес

$$\eta_t = (-1)^{\xi_t}$$

Чи буде η_t марковським процесом? Знайти перехідні ймовірності.

Задача 3.7 За інфінітезимальною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

знайти матрицю ймовірностей переходів $\Pi(t) = \|\pi_{ij}(t)\|$.

Задача 3.8 В умовах задачі № 3.7 знайти безумовні ймовірності $p_j(t) = P\{x(t)=j\}$ ($j=1;2$), якщо $x(0)=1$.

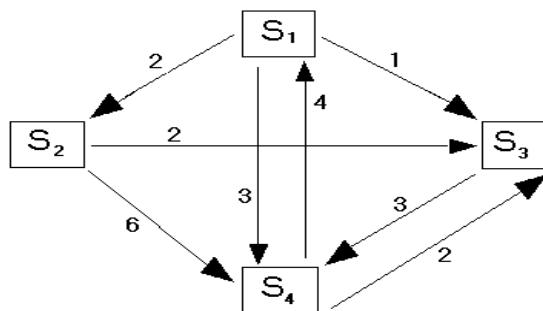
Задача 3.9 В умовах задачі № 3.7 знайти граничні ймовірності p_1 та p_2 .

Задача 3.10 За матрицею ймовірностей переходів

$$\Pi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + e^{-t}) & \frac{1}{2}(1 - e^{-t}) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-t}) & \frac{1}{2}(1 + e^{-t}) \end{pmatrix}$$

знайти інфінітезимальну матрицю A .

Задача 3.11 Радіотехнічний пристрій може перебувати в одному зі станів S_1, S_2, S_3, S_4 . Граф станів разом з інфінітезимальними характеристиками наведено нижче:



Підрахувати граничні ймовірності і дати їм інтерпретацію.

Домашнє завдання № 3

1. $x(t)$ – марковський випадковий процес. Довести, що марковськими також будуть наступні випадкові процеси:

а) $y(t) = cx(t)$ ($c = \text{const}$);

б) $y(t) = x(t + \tau)$ ($\tau \in \mathbb{R}$);

в) $y(t) = c + x(t)$ ($c = \text{const}$).

2. ξ_t – пуассонівський випадковий процес з параметром λ . Будуємо новий випадковий процес

$$\eta_t = (-1)^{\xi_t + 1}$$

Чи буде η_t марковським процесом? Знайти перехідні ймовірності.

3. $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ – незалежні випадкові величини. Утворюємо випадковий процес з неперервним часом S_t ($t \geq 0$) так:

$$S_t = \xi_k(t + k) \quad \text{для} \quad k \leq t < k + 1.$$

Чи буде S_t ($t \geq 0$) марковським процесом?

4. Система може перебувати в одному із станів $E_0, E_1, E_2, \dots$, причому в довільний момент часу t система може змінити свій стан і перейти в стан з номером на одиницю більшим. Якщо $\Delta t > 0$ досить мале, то ймовірність переходу за час $(t, t + \Delta t)$ зі стану E_n в стан E_{n+1} складає $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, де $\lambda > 0$. Використовуючи поняття інфінітезимальної характеристики знайти ймовірності переходів $p_n(t) = P\{x(t) = E_n \mid x(0) = E_0\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). (Результат порівняти з відповідною задачею з заняття 1)